Math.u.
309
g

ayser: Keine Angaben über die Zahl der Kpf.
2 Bll., 80 SS. Mit 4 gefalt. Kupfertaf.
Math. u. 309 g

<36629669650017

<36629669650017

Bayer. Staatsbibliothek

Kleine
mathematische Schriften

von dem

Königlich Baierischen Wasser- Brücken- und Strassenbau - Oberinspektions - Ingenieur

von Ranson.

BIBLIOTHECA GYMNASII GERANI

Mit 5 Kupfertafeln und 4 Tabellen.

Nürnberg 1809.
In der Steinischen Buchhandlung.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

07/05/23

Vorrede.

Die folgenden Abhandlungen über Algebra, Trigonometrie und Goneometrie, beweisen, daß man auch mit einer viel einfachern Logik, als jener, welche der gewöhnlich gegebenen Theorie der Algebra zum Grunde liegt, dieselben Resultate erhält, wie bisher, und den Vortheil, der hieraus für die denkende Klasse der Menschen entsteht, ist, eine reinere Ansicht eines der wichtigsten Theile der Wissenschaftslehre, also auch ein leichteres Aufstoßen des Ganzen, und daher mehrere Gemeinnützigkeit. Mir scheint viel gewonnen.

Denjenigen, welche dieser Behauptung widersprechen wollen, liegt also ob, zu beweisen: 1) daß meine aufgestellten Grundsätze nicht einfacher sind, als die

bisher gegebenen, 2) daß meine Resultate falsch oder schwerer zu entwickeln sind, als bisher geschah. Unüberlegte und leidenschaftliche Schmierereyen unter dem Titel Recensionen, sind so sehr unter der Würde des Gelehrten, wenn er auch noch so sehr die Autorität seines Rufes mißbrauchen wollte, daß ich sie nicht befürchten zu müssen glaube.

Den noch Unbefriedigten werde ich bey einer bessern Muse, durch die Anwendung meiner aufgestellten Grundsätze, auf die Theorie der Reihen, auf Differenzial- und Integral-Rechnung, auf höhere Geometrie, so weit befriedigen, daß ihn bey einem unbefangenen Geist wenig mehr zu wünschen übrig bleiben wird, was auf meinen Zweck (Vereinfachung des Ganzen) Bezug hat.

der Verfasser.

Trigonometrische
Auflösung
wichtiger Aufgaben,
welche
bey Berechnung von Entfernungen, Flächen
und deren Theilung vorkommen.

Einleitung.

Das Folgende enthält nichts als Beweise, daß ältere und neuere berühmte Mathematiker an der logischen und manchmal mathematischen Wahrheit (der nur von minder richtig denkenden Mathematikern als unfehlbar geglaubten) Theorie der Analys gezweifelt haben. Vor's erste wollen wir eine Stelle von dem berühmten Mathematiker d'Alembert anführen.

Fig. I. „Von einem Punkt K, welcher außerhalb einer Kreislinie liegt, soll „man eine gerade Kmm' so ziehen, daß der „Theil mm', welcher in den Kreis hinein „fällt, einer gegebenen Linie gleich ist."

„Von dem Punct K und durch den „Mittelpunct des Kreises, ziehe man die „gerade KAB, welche diese Kreislinie in „den Puncten A und B berührt. Es seye „$KA=a$, $KB=b$, $mm'=c$, $Km=x$, „so ist vermög der Eigenschaften des Kreises

$$ab = x(c+x) = cx + x^2,\ \text{folglich}$$

$$x^2 + cx - ab = 0,\ \text{oder}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab}.$$

„Es hat also x zwey Werthe. Der erste, „welcher positive ist, leistet der Aufgabe „vollkommen Genüge; was bedeutet aber „der zweyte, welcher negativ ist? Es „scheint, daß er sich nur auf den Punct m′ „beziehen könne, welcher der zweyte von „denen ist, wo Km die Kreislinie schnei„det: Wirklich, wenn man annimmt, daß „$Km' = x$, so wird $x(x-c) = ab$, oder „$x = \tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab}$. Der positive „Werth von x in diesem Falle ist also der„selbe, wie der negative in dem vorigen. „Wenn also schon von dem bey den Wur„zeln der Gleichung $x = \tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab}$, „die eine positiv und die andere negativ ist, „so behalten sie doch beyde dieselbe Richtung „in Hinsicht des Puncts K. Das Gesetz, „nach welchen diese Wurzeln in einer ent„gegengesetzten Richtung genommen werden „sollen, ist also für diesen Fall falsch."

„Wenn im Gegensatz der Punct K auf „dem Durchmesser AB selbst angenommen „wäre, und nicht auf seiner Verlängerung, „so fände man für x zwey positive Werthe,

„welche im Gegentheil wirklich entgegen„gesetzt sind. Dieses Gesetz ist also in die„sem Falle wieder falsch. So d'Alembert."

Nach den Grundsätzen der von mir gegebenen Theorie, erhält man für diese sehr leicht aufzulösende Aufgabe (welche in einem so grossen Philosophen und Mathematiker durch die Unrichtigkeit der Theorie selbst so viele Zweifel erregt hat) unmittelbar nach der von mir für diesen Fall der Gleichungen vom zweyten Grad gegebenen allgemeinen Formel

$$x = \tfrac{1}{2}d + \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + p} \quad y = \tfrac{1}{2}d - \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + p}$$

$$x = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab} \quad y = \tfrac{1}{2}c - \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab}$$

Es seye $b = 12$, $a = 5$, $c - 6$, so erhält man

$$x = 3 + \sqrt{9 + 60} \quad y = 3 - \sqrt{9 + 60}$$

und $x = 11{,}3$, $y = 5{,}3$.

Diese Werthe von x in der Gleichung $x'^2 \pm cx' - ab = 0$ substituirt, giebt $60 - (67{,}8 - 127{,}6) = 60 - 59{,}8 = 0$, der zweyte Werth von x giebt $60 - (31{,}8 + 28{,}1) = 60 - 59{,}9 = 0$. Beyde Werthe sind also reele und positive Größen, und entsprechen den Bedingnissen der Aufgabe vollkommen, nur ist im ersten

Fall $Km' = x$, und im zweyten $Km = x$. Alle diese Schwierigkeiten, welche d'Alembert bey der Auflösung dieser so einfachen Aufgabe fand, sind also nur eine Folge der allgemein angenommenen Theorie der Algebra, und der Forml für Gleichungen vom 2ten Grad. Die wahre allgemeine Gleichung für diese Aufgabe ist also $x^2 \pm cx - ab = o$, denn es ist ja beym ersten Anblick der Figur klar, daß man sowohl Km als Km' suchen könne, und daß also die Gleichungen $\begin{matrix} x\,(c+x) \\ x'(c-x') \end{matrix} = ab$ seyen, das ist, $x^2 + cx = ab$ und $x'^2 - cx = ab$, oder beyde zugleich ausgedrückt $x'^2 \pm cx = ab$.

Es giebt, wie ich in meiner gegebenen Theorie der Gleichungen bewiesen habe, zwey allgemeine Formen für Gleichungen vom 2ten Grad, nemlich jene für den Fall, wo der Coefficient des mittleren Gliedes summarisch ist, und jene, wo der Coefficient des mittleren Gliedes eine Differenz ist, denn diese Fälle können sich nie gleich gesetzt werden. Die erste dieser Formeln ist:

$$x = \tfrac{1}{2}s + \sqrt{\tfrac{1}{4}s - p} \qquad y = \tfrac{1}{2}s - \sqrt{\tfrac{1}{4}s - p}$$

die zweyte

$$x = \tfrac{1}{2}d + \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + p} \qquad y = \tfrac{1}{2}d - \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + p}.$$

Fernere Beweise. In Carnot's Géometrie des positions (welche der Verfasser des Versuches das Studium der Mathematik zu erleichtern so ziemlich benützt zu haben scheint), sagt der Verfasser in seiner dissertation preliminaire p. III: „Es ist nichts leichteres, als den Begriff „negativer Größen aufzufassen, welchen „positive Größen vorhergehen, die größer „sind, als sie; Aber in der Algebra wird „man oft auf Resultate gebracht, welche „isolirte negative Größen sind, und wenn „man den Sinn dieser Ausdrücke bestimmt „wissen will, so fehlt es an reinen Grund„sätzen, weil sie von Operationen resultiren, „welche selbst nicht rein faßlich und aus„führbar sind. Auch haben die größten „Geometer nicht über die wahre Bedeutung „der isolirt stehenden negativen Größen „einig werden können u. s. w."

Ferner sagt der Verfasser p. IV: „Dieser grosse Geometer (d'Alembert) beweiset in diesem Memoire das Un„gegründete und Falsche dieser Theorie."

In einer andern Stelle führt der Verfasser wieder eine Bemerkung von d'Alembert an, worin dieser in Hinsicht der Behauptung, daß die negativen Größen weniger als nichts sind, sagt: „Es seye das

„Verhältniß 1 : — 1 = — 1 : 1, wenn „diese Behauptung wahr wäre, d. i. wenn „— 1 weniger als 0 wäre, so müßte es „auch kleiner als 1 seyn. Es wäre also „das zweyte Glied dieses Verhältnißes „kleiner als das erste, folglich müßte auch „das vierte kleiner seyn als das dritte, und „— 1 würde zugleich größer und kleiner „seyn als 1, welches ein Widerspruch „ist."

Den Begriff der Entgegensetzung mit der Algebra verbinden, ist allezeit höchst ungereimt, denn wenn a, b entgegengesetzt ist, so kann ja + a — b niemals ein ± d geben, weil kein — b in einem + a enthalten seyn kann, und dieser Fall, so wie alle übrigen dieser Art, sind niemals Gegenstand der Berechnung, wohl aber a — b, wo a und b völlig gleichartige Größen sind, deren Differenz durch Subtraction bestimmt werden soll, welche hier mit dem Zeichen (—) bezeichnet ist.

Ferner sagt Carnot: „Um zu beweisen, daß auch diese Definition, daß ne„gative Größen solche sind, welche „dem positiven entgegengesetzt „sind, falsch seye, seye eine krumme Linie, „z. B. ein Kreis ACRDBEGS, in des„sen Fläche die beyden Arme AB, RS

„gezogen sind, so daß sie sich in dem Punct
„K, als Anfangspunct der Abscissen senk-
„recht schneiden. Von einem Punct C
„dieser Curve seye die Abscisse Cp gezo-
„gen und bis in D verlängert, so ist auch,
„wenn man pD für positiv annimmt, Cp
„negativ, und folglich $Cp = - pD$;
„woraus folgt $Cp + pD = CD = 0$,
„ein absolutes Resultat u. s. w.

Ferner sagt Carnot: „Es seye ein
„Kreis ARBS, K dessen Mittelpunct,
„und AB irgend einer seiner Durchmesser,
„so ist $AB = AK + KB$ (A). Ziehet
„man nun ferner durch den Mittelpunct K
„die Axe RS senkrecht auf AB, und durch
„irgend einen Punct C des Kreises die
„Curve CD mit AB gleichlaufend, so daß
„sie die Axe RS in einem Punkt p schnei-
„det, so ist, wenn man R für den An-
„fangspunct der Abscisse annimmt $x = Rp$,
„$y = pD$ und $a = KR$ setzt $y = \pm \sqrt{2ax - x^2}$.
„Woraus nach diesem Grund-
„satze folgt, daß y zwey sich entgegengesetzte
„Werthe habe, d. i. $pD = + \sqrt{2ax - x^2}$
„und $Cp = - \sqrt{2ax - x^2}$. Zwey
„Gleichungen, welche statt haben müssen,
„welchen Werth Rp und x immer haben.
„Es seye $Rp = RK$, oder $x = a$, so wird

„pD = KB und Cp = AK, die beyden „Gleichungen werden also KB = a, und „AK = — a. Substituirt man diese beyden Werthe AK und KB in der Gleichung (A), so erhålt man AB = o. „Wieder ein absurdes Resultat."

Ich erhalte nach den von mir gegebenen Grundsåtzen $pD = \sqrt{2ax - x^2}$ und

$$C'p' = \sqrt{2ax - x^2}.$$

Die Werthe von pD und Cp müssen sich immer gleich bleiben, sie mögen irgend eine Richtung gegen einander haben, denn es ist ja auch Cp, pD und Sq und qE immer = y für jede correspondirende Abscisse x. Will man Richtungen entwikeln, so muß man Größen zum Grunde der Aufgabe legen, aus welchen sie entwikelt werden können, und dieses sind die Winkel, welche sie mit irgend einer gegebenen Linie bilden.

Doch ich glaube denjenigen, welche so viele Selbstståndigkeit des Geistes haben, die Wahrheit meiner Gründe einzusehen, genug Beweise gegeben zu haben, und sie werden mit mir einsehen, daß es låcherlich ist, auf öffentlichen Schulen Ungereimtheiten zu dociren, welche schon von den größten Mathematikern gerügt wurden.

Theorie.

1) In einem Kreis mißt ein Winkel an der Peripherie Fig. I. einen doppelt so grossen Bogen desselben Kreises als im Mittelpunct, dieß beweißt die Geometrie.

2) In Fig. 1. 2. 3. ist also der dem Winkel A gegenüber stehende Kreisbogen m p′q′n noch einmal so groß, als jener p′q′, welcher den Winkel A′ = A gegenüber steht. Eben so ist es mit dem, den Winkel B, C entgegenstehenden Bogen.

3) Es verhalten sich in zwey Kreise die Sehnen gleichviel messender Bogen, wie ihre Durchmesser.

4) Wenn also die halbe Cord. irgend eines Bogens der *sinus* dieses Bogens heißt, so ist im Dreyeck a, b, c, $\frac{1}{2}a = \sin. A$, weil a sowohl die Sehne vom Bogen mon, als mpgn ist. Eben so ist $\frac{1}{2}b = \sin. B$, und $\frac{1}{2}c = \sin. C$.

5) Man hat sonach für jedes Dreyeck im umschriebenen Kreis

$$R : r \left\{ \begin{array}{l} \sin. A. : \frac{1}{2}a \\ \sin. B. : \frac{1}{2}b \\ \sin. C. : \frac{1}{2}c \end{array} \right.$$

6) Eben so nennt man die halbe Sehne eines Winkels, die mit einem andern 90° macht, den *sinus* dieses Winkels, oder auch den *cosinus* des erstern. So ist pn der sinus des Winkels a, dessen Maas der Bogen $p'q' = \frac{1}{2} m p'q'n$ ist, es ist aber auch die gerade $q p'' = pq = \sin.(R - A)$, oder nach obiger Erklärung gleich *cos. A*.

Anmerkung. Diese wenigen Voraussetzungen sind hinreichend, alles aus ihnen zu folgern, was die Goneometrie des Hrn. Pf. Däzl leistet.

---

§. 1.

Anwendung

auf die Berechnung der Entfernungen.

1te Aufgabe. Im Dreyeck a, b, c, (Fig. 1. 2. 3) ist die Basis a, und die beyden Winkel B und C gegeben, man soll das Dreyeck bestimmen.

Auflösung. Es ist der Winkel $A = 2R - (B + C)$ bekannt, folglich vermög $R : r = \sin. A : \frac{1}{2} a$.

$L r = L R + L \frac{1}{2} a - L \sin. A$, der Radius r des umschriebenen Kreises bekannt.

Nun ist b unbekannt, folglich wird b und c vermög

$L \frac{1}{2} b = L \sin. B + L r - L R$ und

$L \frac{1}{2} c = L \sin. C + L r - L R$ bestimmt.

2te Aufgabe. Es sind im Dreyeck a, b, c zwey Seiten a, b, und einer der gegenüber stehenden Winkel, z. B. B gegeben, das übrige zu finden.

Auflösung. Es ist $L r = L R + L \frac{1}{2} b - L \sin. B$, nun ist $L \sin. A = L R + L \frac{1}{2} a - L r$, und so die Winkel A und C bekannt, die Seite c aber findet man vermög $L \frac{1}{2} c = L \sin. C + L r - L R$.

3te Aufgabe. Es sind im Dreyeck a, b, c, die zwey Seiten b, c, nebst den Winkel A gegeben, das übrige zu bestimmen Fig. 4.

Auflösung. Wenn man die Seite c soviel verlängert, bis in m der Winkel A ein rechter wird, so ist der Winkel $x = 2R - [(R - A) + R]$, nimmt man die Seite b als Radius eines Kreises an, so ist, wenn wir diesen Radius mit r' bezeichnen, $R : r' = \sin. x : om$, also auch mn'

$x = A - R.$

bekannt. Da nun $\overline{c+om}^2 \pm \overline{mn}^2 = a^2$, (wo das Zeichen der Subtraction gilt, wenn A ein spitziger Winkel ist), so ist auch a bekannt und das übrige zu bestimmen.

4te Aufgabe. Es sind im Dreyeck a, b, c die zwey Seiten a, b, nebst dem Winkel C gegeben, das übrige zu bestimmen Fig. 5.

Auflösung. Es ist, wenn man $a = r'$ setzt, $mn = r' \sin. C$, und $mn' = r' \cos. C$, folglich $mn' - b = mo$. Nun ist $on = \sqrt{\overline{mn}^2 + \overline{mo}^2}$, folglich auch $c = on$ bekannt, und das übrige wie oben. Dasselbe gilt für die Auflösung des spitzwinklichten Dreyecks nXn'.

5te Aufgabe. Es sind im Dreyeck a, b, c die drey Seiten gegeben, man soll das übrige bestimmen.

Auflösung. Aus der elementar Geometrie erfolgt unmittelbar (Fig. 6) für jedes Dreyeck a, b, c,

$$a : b + c = b - c : p'n - mp',$$

da nun auch $p'n = a - p'm$ bekannt. Setzt man nun $c = r'$, so ist $mp' = r \cos. B$, folglich der Winkel B bekannt.

Setzt man nun auch $b = r''$, so ist $pn' = r'' \cos. C$ und $\frac{p'n}{r''} = \cos. C$, und also auch der Winkel A und der Flächeninnhalt $S = op \times \frac{a}{2}$ bekannt, vermög $r'' \sin. C = op$.

6te Aufgabe. Es ist im Dreyeck a, b, c der Flächeninnhalt S, die Seite a und der Winkel A gegeben, man soll das übrige bestimmen Fig. 6.

Auflösung. Es ist $Lr = LR + L\frac{1}{2}a - L \sin. A$, folglich r bekannt, also auch $qq' = r \cos. A$, da nun die Höhe im Dreyeck $h = \frac{S}{2}$, so ist $h + r \cos. A = op = r \cos. y$, somit auch $pq = p'q' = r \sin. y$ bekannt, und folglich auch $\frac{1}{2}a - p'q$ das Segment der Basis mp, und alles übrige.

Anmerkung. Wäre einer der beyden andern Winkel gegeben, so würde die Aufgabe gar keine Schwierigkeit gehabt haben, da mit $\frac{2S}{a} = h$ alles übrige bekannt ist.

7te Aufgabe. Es ist im Dreyeck a, b, c das Product $abc = p$ die Basis a, und die Höhe h gegeben, man soll das übrige bestimmen.

Auflösung. Es ist $h \times \frac{1}{2}a = S$ der Flächeninnhalt des Dreyecks. Nun ist aus der elementar Geometrie bekannt, daß wenn wie immer r der Radius des umschriebenen Kreises des Dreyecks ist,

Log. p — Log. S = Log. 4r. Da nun auch r bekannt ist, so ist auch alles übrige gegeben, denn es ist

$L. \sin. A = LR + L\frac{1}{2}a - Lr$, nun ist auch $r \cos. A = qq'$, folglich $op' + pp' = r \cos. y$, und $pq = p'q = r \sin. y$, und somit die Segmente der Basis und alles übrige.

8te Aufgabe. Es sind im Dreyeck a, b, c der Perimeter $a + b + c = s$ die Seite c, und der Winkel B gegeben, das übrige zu bestimmen.

Auflösung. Setzt man $c = r'$, so ist $r' \sin. B = op'$ und $r' \cos. B = mp'$. Da nun $s - c' = a + b$ ebenfalls bekannt ist, und auch $a + b - mp' = on + p'n = (x + y) = s$, so muß also in dem rechtwinklichten Dreyeck $op'n$, $x = on$, $y = p'n$ bestimmt werden. Nun ist op' bekannt, und $\overline{op}^2 = x^2 - y^2$. Setzt man also $\overline{op}^2 = d$, so ist $x + y + x^2 - y^2 = s' + d$, und daher auch $s' + d = x + y +$

$(x + y) \cdot (x - y) = \frac{x + y}{x + y} + x - y = \frac{s' + d}{x + y}$. Da nun $x + y = s'$, so erhält man $\frac{s' + d}{s'} = 1 + x - y$, also $x = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2}$ und $y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - x}{2}$ und alles übrige bekannt.

9te **Aufgabe.** Das Dreyeck a, b, c ist bekannt, man soll aus den Winkeln x, p, q die Entfernung des Puncts x bestimmen Fig. 7.

Auflösung. Es ist $L\,r = L\,R + L\,\frac{1}{2}a - L\sin.x$, also auch der Radius des umschriebenen Kreises bekannt, nun ist wie immer $L\,\frac{1}{2}c = L\sin.p + L\,r - L\,R$, und $L\,\frac{1}{2}b = L\sin g + L\,r - L\,R$. Es sind also in dem Dreyeck m o′n die drey Seiten a′, b′, c′, nebst dem Winkel $C'' = q$ bekannt. Da nun im Dreyeck a, b, c der Winkel C ebenfalls bekannt ist, so erhält man nun aus den beyden Seiten b und b′, und diesen eingeschloßenen Winkel y, im Dreyeck o o′n den Winkel z, es ist also leicht, da hiedurch die ganzen Winkel m und n bekannt sind, das übrige zu bestimmen.

Anmerkung. Man siehet leicht, daß diese Aufgabe dieselbe bleibt, wenn auch nur

die Linien m n, und ihre Theile m o′ + o′n = b′ + c′, oder das Dreyeck m o″ n gegeben ist.

10te Aufgabe. Die Linie BC und der ihr entgegenstehende Winkel BAC nebst den Winkeln CAD, p und q sind gegeben, das übrige zu bestimmen Fig. 8.

Auflösung. Man nenne den Winkel BAC + CAD = α, so kennt man in dem Dreyeck ABC alle drey Winkel p, α und 2R — (p + α) = φ. Eben so kennt man im Dreyeck CAD den Winkel CAD, den Winkel D = (p + q), folglich auch den Winkel ACD = y. Nun folgere man

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l}\sin. y : \sin. D = AD : AC \text{ und} \\ \sin. \varphi : \sin. p = AD : AB\end{array}\right.$$

multipliciret man nun diese beyden Verhältnisse so miteinander, daß AD ein gemeinschaftlicher Factor wird, so erhält man

$$\frac{\sin. y\ \sin. p}{\sin. D\ \sin. \varphi} = \frac{AD \times AB}{AD \times AC} = \frac{AB}{AC}$$

Man kennt also das Verhältniß der beyden Seiten AB : AC. Es seye dieses Verhältniß m : n, so nehme man an, die beyden Seiten seyen m und n, und berechne aus ihnen und dem Winkel BAC eine

dritte Seite x, so hat man ein dem gesuchten ähnliches Dreyeck, und also, da BC gegeben, alles übrige, vermög

II. $\begin{cases} L:x:L:BC = L:m:L:AC \text{ und} \\ L:x:L:BC = L:n:L:AB \end{cases}$

Anwendung. Es seye BC = 3000. Winkel p = 21°. 59′. 40″. q = 33°. 50′. 40″. p + q = 55°. 50′. 20″. BAC = 42°. 50′. 10″. CAD = 57°. 19′, folglich BAD = x = 100°. 9′. 10″ und φ = 57°. 51′. 10″. ACD = y = 66°. 50′. 40″.

Folglich L sin. 55°... α = 9,9177480
vermög I. L sin. 57°... α = 9,9277212

19,8454692

L sin. 21°... α = 9,5733148
L sin. 66°... α = 9,9635237

19,5368385

Nun ziehe man z. B. von der Characteristik beyder Logarithmen 16 ab, so bleibt, wie bekannt, das Verhältniß umgeändert, folglich Lm = 3,8444692, und Ln = 3,5368385: Berechnet man nun aus m und n, und den eingeschloßenen Winkel die Seite x = 4585, so ist vermög BC = 3000, für AC = 4584, und AB = 2253, aus der Formel II. und so das übrige bestimmt.

§. 2.

Anwendung

auf die Berechnung der Flächeninnhalte.

1te Aufgabe. Es sind im Viereck ABCD die beyden Diagonale AC, BD und der Winkel AEB, welchen sie einschließen, gegeben, den Innhalt zu finden Fig. 9.

Auflösung. Man setze AC = a. BD = b, BE = x, DE = b — x, den Winkel AEB = α, so ist die aus B gezogene senkrechte BG = sin. α und die aus D gezogene senkrechte Df = (b — x) sin. α. Der Flächeninnhalt des Dreyecks ADC ist also S = $\frac{a}{2}$ [(b — x) sin. α] und jener des Dreyecks ABC = S = $\frac{a}{2}$ (x sin. α), folglich der Flächeninnhalt des Ganzen S = a/2 [x sin. α + (b — x) sin. α]. Führt man die im zweyten Glied der Gleichung angezeigte Multiplication aus, so erhält man (b sin. α — x sin. α) und folglich S = a/2 [x sin. α + b sin. α — x sin. α] = ab/2 sin. α.

Anwendung. Es seye a = 456,7. b = 343,1 Winkel α = 106°. 6′, so ist

$$
\begin{array}{rl}
La & = 2,6596310 \\
Lb & = 2,5354207 \\
L\sin.\alpha & = 9,9826236 \\
\hline
 & 15,1776753 - 10 \\
L2 & = 0,3010300 \\
\hline
 & 4,8766453 = L75276
\end{array}
$$

2te Aufgabe Fig. 9'. Es sind in dem Viereck ABCD die Seiten AB, AD und die Winkel BAC, DAC, ADC gegeben, man soll den Innhalt finden.

Auflösung. Es sind also in dem Dreyeck ADC, da die Winkel DAC und ADC gegeben sind, alle drey Winkel bekannt, denn es ist $2R - (A + D) = DCA$. Da nun auch AD gegeben ist, so ist $Dm = b \sin.\alpha$, wo $AD = b$, und Winkel $DAC = \alpha$ gesetzt wurde, setzt man nun auch Winkel $ACD = \beta$, so ist, da nun Dm bekannt ist, auch $AC = b \cos.\alpha + c \cos.\beta$ bekannt.

Im Dreyeck ABC ist nun auch der Winkel $CAB = y$, nebst der Seite AB $= a$ gegeben, und $Bn = a \sin. y$. Der Innhalt des Dreyecks somit $Dm \times \frac{AC}{2} = ADC$, jener des Dreyecks $ABC = Bn \times \frac{AC}{2}$, und der Inhalt $S = (Dm + Bn) \frac{AC}{2}$.

Anwendung. Es seye $a = 274,2$, $b = 273$, Winkel $y = 72°.\ 46'$. $\alpha = 40°.\ 24'$, Winkel $ADC = 87°$, so ist Winkel $ACD = \beta = 180° - 127°.\ 24' = 52°.\ 36'$, nun ist

$$LDm = (Lb + L\sin.\alpha - LR) = L\,176,9$$

$$\begin{array}{r} L\,273 = 2,4361626 \\ L\sin.40° = 9,8116554 \\ \hline 12,2477180 = L\,176,9 \end{array}$$

Eben so ist $LDC = (LR + LDm - L\sin.\beta) = L\,222,7$. Und

$L\sin.C = (LDC + L\cos.\beta - LR) = L\,135,2$. Ferner

$LAm = (Lb + L\cos.\alpha - LR) = L\,207,9$. Folglich

$AC = 135,2 + 207,9 = 343$. Es ist endlich $LBn = (La + L\sin.y - LR) = L\,261,8$, folglich

$S = 176,9 \times 171,6 + 261,8 \times 171,6 = 75281$. Das übrige nun findet sich vermög $LAn = La + L\cos.y - LR$, und $nC = AC - An$, und hieraus

$\overline{BC}^2 = \overline{Bn}^2 + \overline{nC}^2$ und endlich vermög $LBC : LBn = L\sin.tot. : L\sin.C - \beta$, den Winkel B.

3te Aufgabe. Es sind in dem Viereck ABCD die Seiten AB, AD und die Winkel B, C und D gegeben, den Innhalt zu finden.

Auflösung. Es ist (Fig. 9″) also auch der Winkel A bekannt, nur seye $AB = a$, $AD = b$, so ist $An = a \sin. B$ und $nB = a \cos. B$. Da nun der Winkel $BAn = R - B = \alpha$ bekannt ist, so ist es auch der Winkel $DAo = A - \alpha = \beta$, folglich auch $Do = b \sin. \beta$ und $Ao = b \cos. \beta$, und hieraus $on = An - Ao = pD$. Wenn wir nun den Winkel $ADo = y$ setzen, so ist der Winkel $CDp = D - y = \varphi$, und $pC = DC \sin. \varphi$, folglich $DC = \frac{pC.R}{\sin. \varphi}$, woraus nun $Dp = DC \cos. \varphi$ bestimmt wird. Es ist also $pn = Cn - Do$ bekannt, folglich auch $BC = Cn + Bn$, und also der Innhalt des Ganzen

$$S = [\frac{Bn \times An}{2} + \frac{Ao \times Do}{2} + \frac{Dp \times pC}{2} + Do \times Dp].$$

Anwendung. Es seye a, b, Winkel, B, C und D wie oben gegeben, so ist Winkel $A = 4R - (B + C + D) = 113°. 10'$. Winkel $\alpha = 27°. 41'. 50''$. Winkel $\beta =$

85°. 28′. 10″, An = 2427. Bn = 127,4. Do = 272. Ao = 21,5. on = An — Ao = 242,7 — 21,5 = 221,2. Winkel y = 4°. 31′. 50″. φ = 82°. 28′. 10″. DC = 223,1. Dp = 29,24. op = 243 und S = 15453 + 3234 + 2924 + 53672 = 75284.

4te Aufgabe. Es sind in dem Viereck ABCD die vier Seiten, und die beyden Winkel B und D gegeben, den Innhalt zu finden Fig. 9‴.

Auflösung. Man bestimme An = a sin. B (wie oben) und eben so Bn = a cos. B, und aus An und [Cn = (BC — Bn)] die Diagonale AE, nun findet man den Winkel β vermög

L sin. β = (LDE + L sin. D — LAC) und hieraus Dm = DC sin. β. Es ist also der gesuchte Flächeninnhalt

$$S = \frac{AC}{2} \times Dm + \frac{BC}{2} \times An.$$

Anwendung. Behält man die Werthe der vorigen Aufgabe bey, so erhält man An = 242,8, BC = 370, Dm = 176,9, AC = 343 und S = 75274.

„Hat eine Figur mehr als drey oder „vier Seiten, so zerlege man sie in drey „oder vier Ecke, oder in beydes, und be-

„rechne (nachdem man die unbekannten, die „also nie mehr als drey seyn können, be„stimmt hat) eines jeden Innhalt, und „summire sie.“

5te Aufgabe. Es sind in dem Vierecke ABCDE alle Seiten und Winkel, die Seiten AE und DE, und die Winkel E ausgenommen, gegeben, diese drey unbekannten und den Innhalt zu finden Fig. 10.

Auflösung. Es seye $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = e$, $AE = f$, so ist, da die Seite a und der Winkel A gegeben sind, $Bm = a \sin. A$ und $Am = a \cos. A$ bekannt. Nun ist Winkel $\alpha = (R - A)$ und auch $\beta = [B - (R + \alpha)]$ bekannt, man kennt also auch $Cn = b \sin. \beta$ und $Bn = b \sin. \beta$ und $Bn = b \cos. \beta$. Es ist aber Winkel $\varphi = (B - \beta)$ und Winkel $S = (C - \varphi)$, folglich $y = (R - S)$ ebenfalls bekannt, und folglich auch $Co = c \sin. y$ und $Do = c \cos. y$. Es ist $\lambda = D - y$ bekannt, folglich die Seite $DE = x$ gesetzt, und aus $(Bn + Cn - Co) = no = \acute{o}E$, oE bestimmt, $DE = \frac{\acute{o}E. R}{\sin. R}$. Es ist aber nun auch $Do = d \cos. \lambda$ bekannt, folglich der gesuchte Innhalt $S = [Am \times \frac{Bm}{2} + Cn \times \frac{Bm}{2} + Co \times \frac{D\acute{o}}{2}$ $Do \times \frac{\acute{o}E}{2} + Bm \times Bn]$.

6te Aufgabe. In demselben Vielecke sind die Winkel D und E nebst der Seite DE unbekannt, man soll den Flächeninnhalt, und diese drey unbekannten finden.

Auflösung. Man folgere wie oben, da man aber den Winkel λ nicht kennt, aber oE, so bestimme man aus (Ab + Bm + Dn — AE) oD, und aus $\sqrt{\overline{oE}^2 + \overline{oD}^2}$ DE, und das übrige wie oben.

7te Aufgabe. In dem Vielecke ABCDEEG sind alle Seiten und Winkel gegeben, den Innhalt zu finden Fig. 13.

Auflösung. Man zerlege die Figur in Trapeze und Dreyecke, indem man durch alle Eckpunkte mit einer gegebenen, oder willkührlich angenommenen NM Parallelen ziehet.

Man kennt also im Dreyeck AgG die Seite AG, und somit alles übrige, in den folgenden Trapez aber kennt man Bg, gG, und alle vier Winkel, man kennt also auch gm = Bg sin. gBb, und bn = Gb cos. b, folglich

$$S = gm \times \frac{Bm}{2} + gm \times gB + bG \times \frac{bm}{2}$$

und so die übrigen.

§. 3.

Anwendung

auf die Theilung der Flächen im Allgemeinen.

1te Aufgabe. Es ist der Winkel A, den die Spitze irgend einer Figur bildet, gegeben, man soll von derselben eines gegebenen Dreyecks Flåcheninnhalt S abschneiden, so daß die Theilungslinie DC mit AB einen bestimmten Winkel einschliese Fig. 11.

Auflösung. Der gegebene Flåcheninnhalt des Dreyecks verhält sich zum Flåcheninnhalt dessen umschriebenen Kreises, wie der Flåcheninnhalt eines åhnlichen Dreyecks in einem umschriebenen Kreis, dessen Radius jener der Sinustafeln ist, zum Flåcheninnhalt dieses Kreises.

Dieses åhnliche Dreyeck aber ist gegeben vermög den drey gegebenen Winkeln, deren doppelte *Sinus* ein mit dem gegebenen åhnliches Dreyeck bilden, wie schon aus der gegebenen Theorie erhellet.

Es verhalten sich aber die beyden Kreisflåchen, wie die Quadrate ihrer Radien. Es ist also der Radius des umschriebenen

Kreises des Dreyecks bekannt, dessen Innhalt nebst den drey Winkeln gegeben ist.

Anwendung. Es seye A = 50°, D = 60°, S = 3925, und AD soll gesucht werden.

Man erhält also für A′C′ als ähnliche Seiten eines Dreyecks, dessen Radius jener der sinus Tafeln ist

$$\begin{array}{r} L \sin. 50^\circ = 9{,}8842540 \\ L^2 = 0{,}3010300 \\ \hline 10{,}1852840 = L D'C' \end{array}$$

für dieses Dreyeck Höhe

$$\begin{array}{r} L \sin. 73^\circ = 9{,}9729858 \\ L AC = 10{,}2385606 \\ \hline 20{,}2115464 - 10 = L h \end{array}$$

und

$$\begin{array}{r} L\left(\frac{D'C'}{2} \times h\right) = L \sin. 50^\circ = 9{,}8842549 \\ L h = 10{,}3915464 \\ \hline 20{,}0948004 - 10 \end{array}$$

Es ist ferner die Kreisfläche, den Radius = 1 gesetzt 3,141592, und deren Logarithmus 0,4971498. Ferner L 8925 = 3,9506082, und somit 0,0958004 : 0,4971498 = 3,9506082 : 4,3519576, und 4,3519576 = L 22483 = der gesuchten Kreisflächen, theilt man diese mit 314....a, so ist $r^2 = \frac{22482}{314} = 7160$

und hieraus die Quadratwurzel 8417 = dem Radius r des um das Dreyeck umschriebenen Kreises. Folglich

LAD = L sin. 70″ + L 84,7 — L sin. tot. = L 79,6 u. s. w.

2te Aufgabe. In dem Viereck ABEF (Fig. 12) sind die Seiten AB, und die Winkel A und B gegeben, man soll von demselben ein anderes ABCD, dessen Innhalt gegeben ist, abschneiden, so daß die Theilungslinie DC mit AF einen gegebenen Winkel D bilden.

Auflösung. Man berechne aus den gegebenen Winkeln und der Seite AB das Dreyeck ABm, nebst dessen Flächeninnhalt, und ziehe diesen von jenen des abzuschneidenden Stückes ab, oder jenen von diesen, falls es kleiner seyn sollte. Da nun Am die Basis eines Dreyecks ist, dessen Winkel ymA = α, xAm = φ, also auch der, der Seite Am entgegenstehenden Winkel 2R — (α + φ) = β, bekannt sind, so bestimme man aus

Ly = L sin. φ + LAm — L sin. β.

Diese Seite y, welche dem Winkel φ entgegen stehet, und hieraus y sin. α = h, und h x $\frac{Am}{2}$ = S. Addiret oder subtra-

Kreises des Dreyecks bekannt, dessen Innhalt nebst den drey Winkeln gegeben ist.

Anwendung. Es seye A = 50°, D = 60°, S = 3925, und AD soll gesucht werden.

Man erhält also für A′C′ als ähnliche Seiten eines Dreyecks, dessen Radius jener der sinus Tafeln ist

$$\begin{array}{r} \text{L sin. } 50° = 9{,}8842540 \\ L^2 = 0{,}3010300 \\ \hline 10{,}1852840 = L\,D'C' \end{array}$$

für dieses Dreyeck Höhe

$$\begin{array}{r} \text{L sin. } 73° = 9{,}9729858 \\ LAC = 10{,}2385606 \\ \hline 20{,}2115464 - 10 = L\,h \end{array}$$

und

$$\begin{array}{r} L\left(\frac{D'C'}{2} \times h\right) = \text{L sin. } 50° = 9{,}8842549 \\ Lh = 10{,}3915464 \\ \hline 20{,}0948004 - 10 \end{array}$$

Es ist ferner die Kreisfläche, den Radius = 1 gesetzt 3,141592, und deren Logarithmus 0,4971498. Ferner L 8925 = 3,9506082, und somit
0,0958004 : 0,4971498 = 3,9506082 : 4,3519576, und 4,3519576 = L 22483 = der gesuchten Kreisflächen, theilt man diese mit 314....*a*, so ist $r^2 = \frac{22482}{314} = 7160$

und hieraus die Quadratwurzel 8417 = dem Radius r des um das Dreyeck umschriebenen Kreises. Folglich

LAD = L sin. 70″ + L 84,7 — L sin. tot. = L 79,6 u. s. w.

2te Aufgabe. In dem Viereck ABEF (Fig. 12) sind die Seiten AB, und die Winkel A und B gegeben, man soll von demselben ein anderes ABCD, dessen Innhalt gegeben ist, abschneiden, so daß die Theilungslinie DC mit AF einen gegebenen Winkel D bilden.

Auflösung. Man berechne aus den gegebenen Winkeln und der Seite AB das Dreyeck ABm, nebst dessen Flächeninnhalt, und ziehe diesen von jenen des abzuschneidenden Stückes ab, oder jenen von diesen, falls es kleiner seyn sollte. Da nun Am die Basis eines Dreyecks ist, dessen Winkel ymA = α, xAm = φ, also auch der, der Seite Am entgegenstehenden Winkel 2R — (α + φ) = β, bekannt sind, so bestimme man aus

Ly = L sin. φ + LAm — L sin. β. Diese Seite y, welche dem Winkel φ entgegen stehet, und hieraus y sin. α = h, und h x $\frac{Am}{2}$ = S. Addiret oder subtra-

hiret man nun (nachdem das abzuschneidende Stück größer oder kleiner als das berechnete Stück ABm ist) diesen Flächeninnhalt von oder zu dem letzt gefundenen, so reducirt sich diese Aufgabe auf die erste dieses Paragraphes.

Da nun das Wachsthumsgesetz der Seite Am im Verhältniß jenes des Flächeninnhalts bekannt ist, so kann man ohne weiters, unter denselben Bedingnissen, so viele Stücke abschneiden, als nöthig ist.

Wäre statt den Winkel D die Linie AD und alles übrige, wie in der vorigen Aufgabe gegeben, so ist somit das Dreyeck ADB bekannt. Ziehet man nun dessen Flächeninnhalt von dem gegebenen ab, so bleibt jener eines Dreyecks ADC übrig, in welchen also der Flächeninnhalt, die Seite AD und der Winkel ADC = ABC — ABD bekannt ist. Dividirt man nun die Seite BD in dem doppelten Flächeninnhalt des Dreyecks BDC, so erhält man dessen Höhe, man kennt also in selben alles. Nun kennt man aber auch den Winkel D = ADB + BDC, die Aufgabe reducirt sich also auf die zweyte.

3te Aufgabe. Man soll von dem Vielecke ABCDEFG ein gegebenes Stück abschneiden, so daß die Theilungslinie,

durch einen innerhalb des Vielecks gelegenen Punkt L, welchen die Linie AL und der Winkel BAL bestimmen, durchgehe Fig. 13.

Auflösung. Man zerlege das Vieleck aus dem Punkt L in Dreyecke, und berechne, von dem Dreyeck ABL angefangen, nach der Ordnung derselben Innhalte, und die nach L hinlaufenden Seiten. Die Möglichkeit dieser Vorschrift in Ausübung zu bringen, erhellet daraus, daß in dem Dreyeck ABL, mit dessen Berechnung der Anfang gemacht wird, nebst der Seite AB, noch die Seite AL und der Winkel BAL, welchen die Lage des Punkts L bestimmt, bekannt sind.

Durch die Vergleichung der besonderen Summen, die man durch wiederholtes Addiren der erstern Dreyecke zu den jedesmal folgenden erhält, mit dem abzuschneidenden Stück S ergiebt sich das Dreyeck, in welches die Theilungslinie fällt.

Gesetzt, die Theilungslinie LM falle in in das Dreyeck ABL, so ist AML das Dreyeck, was von dem Innhalt des Ganzen abgezogen werden muß, um den verlangten Theil desselben zu haben. Es ist aber in demselben der Flächeninnhalt S und die Seite BL nebst dem Winkel B, und somit alles übrige bekannt. Auf eine ähnliche Art

würde man verfahren, wenn der Punkt L, z. B. auf der Linie GS gegeben wäre.

Eben so würde man die Aufgabe auflösen, wenn die Theilungslinie in bestimmten Punkten m, n, o, p, der Linie GS, oder irgend einer andern eintreffen sollten, wie man sich leicht durch bloses Anschauen der (Fig. 13′) überzeugen kann, denn es ist m′m, n′n, o′o, p′p, q′q als Grenze der zu bestimmenden Flächen angenommen, gewiß, daß die Theilungslinie jedesmal in ein bekanntes Dreyeck Emm fällt, und man also aus dem Flächeninnhalt Em′m, der Seite Em und den Winkel E, dieses wie alle übrigen leicht bestimmen könne.

Sollte man von dem Vielecke ABCD EFG gegen A (Fig. 13″) ein gegebenes Stück S abschneiden, so daß die Theilungslinie ML′ mit einer gegebenen parallel lauft, so siehet man ohne weiters, daß die Auflösung auf jener der 1ten Aufgabe dieses § beruhe, diese Linie falle in eines der Trapeze an der Spitze der Figur, wie in der 2ten Aufgabe gezeigt worden.

4te Aufgabe. Es ist der Flächeninnhalt des Dreyecks ABZ, nebst den Seiten und Winkeln, ausgenommen die Seite EF gegeben, die Flächen LCDEF, die

Seiten AF und EF, nebst den Winkeln A und F zu bestimmen (Fig. 14).

Auflösung. Man kennt also ABZ, da nun ABC, nachdem man AC berechnet hat, ebenfalls seinen Innhalt nach bekannt ist, so ist auch ABC — ABZ = ACZ bekannt, dividirt man nun in dem doppelten Innhalt von ACZ mit AZ, so erhält man auch die Höhe des Dreyecks h und folglich CZ und alles übrige.

Anwendung. Der Flächeninnhalt des Dreyecks ABZ seye S = 49623, so ist, da ABC = 51422, ABC — ABZ = 51422 — 49623 = 1800. Theilt man diesen doppelten Flächeninnhalt 1800 x 2 = 3600 mit der Basis AD = 473,5, so erhält man für die Höhe des Dreyecks 7,8. Nun ist vermög

L sin. 59°. 55'. 40'' : L sin. tot. = L 7,8 : L 9,1 = L CZ alles übrige bestimmt.

Wäre aber statt dem Flächeninnhalt des Dreyecks ABZ nur das Verhältniß der beyden Flächen gegeben, so berechne man das Dreyeck ABC = 51422 und das Viereck CDEF = 29989.

Nun folgere man L 14295 : L 10000 = 51422 : L 35972.

Man findet also, da die Höhe des Dreyecks A E G = 105,4 ist, für A X = 951, und für den dieser Seite entgegenstehenden Winkel 146°. 13'. 30". Es kömmt also nur darauf an, durch einige Versuche die beyden gegebenen Flächen im gegebenen Verhältniß so zu modificiren, daß die aus ihnen berechnete Seite A X = A F wird, welches ist, wenn sie dem gegebenen Winkel E entspricht.

Hätte man z. B. den Versuch mit 51422 — 1500 = 49922 gemacht, so daß also vermög

L 14295 : L 10000 = L 49922 : (L 34923 = L Z C D E F) wäre, so würde man der Wahrheit schon ziemlich nahe seyn. Denn man erhielte für den Flächeninnhalt des Dreyecks A E X' = A E G + A G X' = 44162,6 + 1500 + 4034 = 50596. Für dessen Höhe 50796 : 740 = 65,6 x 2 = 136,6. Berechnet man nun aus A C = 473 die Höhe des Dreyecks A Z C = 1500, so erhält man für dieselbe 6, 3; man kennt also auch den der Höhe des Dreyecks A E X' entgegenstehenden Winkel, und aus diesem, dem Rechten, und der Höhe die Linie A X, welche A F werden soll. Berechnet man nun aus den zwey Seiten

AX′, AE′, und den eingeschloßenen Winkel den der Seite AX′ = 865,3 entgegenstehenden Winkel, so erhält man für denselben 129°. 50′. 40″; da man also weiß, daß die Verminderung der Fläche ABC um 1500″ eine Veränderung des der Seite AX entgegenstehenden Winkels von 146°. 15′ 30″ — 129°. 53, 40″ = 16°. 21′. 50″ hervorbrachte, so folgere man ferner: Die Differenz des Winkels AEX zum Winkel AEG ist 146°. 15′. 30″ — 126°. 48′ = 19°. 37′. 30″, da sich nun durch die verhältnißmäßige Veränderung des Dreyecks ABC um 1500′ dieser Winkel um 16°. 21′. 50″ veränderte, so wird aus dem Verhältniße der veränderten Winkel (16°. 21′. 50) : (19°. 57′. 30″) 1500 : x dieses 4te Glied anzeigen, wie viel sich dieses Dreyeck ABC noch verändern muß, um ABZ zu werden. Man erhält also diese beyden Winkel in Secunden aufgelöst

L 58860 : L 70620 = L 1500 : L 1800,

wie wir oben schon gesehen haben.

Anmerkung. Diese Analogie läßt sich aus Carnot's Géometrie des positions nachweisen, wozu hier eben der Ort nicht ist.

Anhang. Anfängern zur Uebung gebe ich hiemit zur Bearbeitung dieser letzten Aufgabe nach Fig. 14 folgende Data:

Es seye AB = 410. BC = 251. CD = 83. DE = 321, EF = x und AF = y. Das gegebene Verhältniß der beyden zu bestimmenden Flächen ABZ und ZCDEF seye :: 14295 : 10000. Ferner seyen die Winkel ABC = 88°. 5'. BCD = 105°. 24'. CDE = 53°. 41' und DEF = 126°. 48.

Etwas über Algebra.

Einleitung.

1) Es ist die gewöhnlichen Zeichen beybehalten, nach dem Begriff des Entgegengesetzten $+a-a=0$, und $\pm ab=0$. Es muß also, ohne auf Widersprüche zu gerathen, nach diesen Begriffen, wo Producte, wie $+\times+$, $-\times-$, $+\times-$, $-\times+$ eintretten müssen, $+a\times+b=+ab$. $-a\times-b=-ab$ und $+a\times-b=\pm ab$ seyn. D. i. gleichartige Größen müssen in allen ihren Modificationen gleichartig bleiben, entgegengesetzte Größen aber können nie ein und dasselbe Ganze bilden, denn was soll dieses Ganze seyn, + oder —.?

2) Nach der allgemein angenommenen Theorie der Algebra ist durch Addition $+5+5+5+5+5=+25$ und $-5-5-5-5-5=-25$. und $\sqrt{+25}=+5$. und $\sqrt{-25}$ unmöglich. Es ist also unmöglich, daß -5 in -25,

woraus es vor unseren Augen entstund, enthalten seye;;; Welch ein grosses Feld für Geisterseher und Astrologen;;; Nach eben dieser Theorie ist $+5+5+5+5+5-5-5-5-5-5 = \pm 5 \pm 5 \pm 5 \pm 5 \pm 5 = 0$. Warum setzt man nach der allgemeinen Theorie $+5 \times -5 = -5-5-5-5-5 = -25$, da doch der Factor -5 fünfmal in der Ordnung $+5$ wiederholt werden soll, und beyde Größen positive, d. i. wirkliche Größen sind.? $-$ und $\pm 25 = 0$ result. Keiner meiner Recensenten hat es auch nur versucht, diese Einwürfe zu heben.

Die Algebra.

Lehrsatz I. Der Zweck der Wissenschaft, welche man Algebra nennt, ist, alle auf Größen sich beziehende Aufgaben nach allgemeinen Gesetzen aufzulösen.

Die Addition.

Lehrsatz II. Addiren heißt den Werth mehrerer gegebenen Größen durch eine Größe ausdrücken, deren Werth allen gegebenen gleich ist. Beispiele enthält Tafel I.

Anmerkung. Da ich nichts als gleichartige Größen annehme, und mit den Zeichen keine anderen Begriffe als jene arithmetischer Operationen verbinde, so können nach diesen Grundsätzen keine Fälle der Addition mit entgegengesetzten Größen eintretten.

Die Subtraction.

Lehrsatz III. Subtrahiren heißt den Unterschied der Größen finden. Beispiele zeigt die Tafel II.

Anmerkung. Der Fall, daß entgegengesetzte Größen von einander abgezogen werden sollen, kann nach gegenwärtiger Theorie nie eintretten, weil sie nie sich enthalten können.

Man kann nie die Schuld von dem Vermögen abziehen, bestimmen kann man, welches von beyden größer ist.

Hierinn liegt der ganze Unterschied meiner und der allgemein angenommenen Theorie der Algebra.

Da nie eine Schuld, Vermögen und Vermögen (absolut) Schuld seyn, so kann nie eines aus dem andern bestimmt werden.

Wenn wir nach der allgemeinen Bezeichnungsart das erstere mit +, letzteres mit — anzeigen, so kann die Aufgabe gegeben werden, den Unterschied zwischen Vermögen und Schuld, und Vermögen und Vermögen zu bestimmen, wie wird man diese Fälle bezeichnen?

Die Multiplication.

Lehrsatz IV. Der Fall, wo eine Größe, so oft zu sich selbst addirt wird, als eine andere oder sie selbst Einheiten enthält, heißt multipliciren.

Beispiele der Multiplication enthält die Tafel III.

Anmerkung. Die Tafel der Multiplication zeigt, daß die Fälle der Multiplication der Zeichen gar nie eintretten müssen, und daß die eingebildeten Größen logisch Unsinn sind.

Die Division.

Lehrsatz V. Bestimmen, wie oft eine Größe in einer andern gegebenen Größe enthalten ist, heißt theilen.

Die Tafel IV. giebt Beyspiele der Theilung mit mehrtheiligen Größen für alle möglichen Fälle.

Folgesatz. Aus obigen Lehrsätzen folgt, daß

1) Die Brüche

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}. \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}. \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ und } \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b}$$

u. s. w.

2) Die Würden

$$\left(a^m b^n c^p\right)^r = a^{mr} p^{nr} c^{pr}. \quad \sqrt[3]{a^g} = a^{\frac{g}{3}}$$

$$= a^3 . \sqrt[3]{a^{12} b^6 c^3} = a^{\frac{12}{3}} b^{\frac{6}{3}} c^{\frac{3}{3}} = a^4 b^2 c,$$

und allgemein $\sqrt[r]{a^m b^n} = a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$. Ferner

$$\sqrt[r]{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)} = \frac{a^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{n}{r}}}.$$

3) Die Wurzelgrößen

$$m\sqrt[r]{a} + n\sqrt[r]{a} = m + n\sqrt[r]{a} \,.\, m\sqrt[r]{a}$$

$$n\sqrt[r]{a} = m - n\sqrt[r]{a} \,.\, \sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}} = a^{\frac{qn+mr}{mq}} b^{\frac{pq+sm}{mq}} = \sqrt[mq]{a^{qn+mr}\, b^{pq+ms}}$$ u. ſ. w.

4) Die Newtoniſche Formel

$$(x+a)^m = x^m + ma\,.\,\frac{x^m}{x} + m\,.\,\frac{m-1}{2}\, a^2\,.\,\frac{x^m}{x^2} + m\,.\,\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m-2}{3}\, a^3\,.\,\frac{x^m}{x^3} + .$$

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}} a}{x} + \frac{\frac{m}{n}\,.\,\frac{m}{n} - 1}{2}\, \frac{x^{\frac{m}{n}} a^2}{x^2} + \frac{\frac{m}{n}\,.\,\frac{m}{n} - 1\,.\,\frac{m}{n} - 2\,.}{2\,.\,3}\, \frac{x^{\frac{m}{n}} a^3}{x^3} +$$

u. ſ. w. nach eben dieſen Geſetzen behandelt werden können.

Das Transpositions- und Reductions-Gesetz.

Nach der bisher aufgestellten Lehrart und den Begriffen, welche wir mit den Zeichen verbinden, nemlich, daß sie nichts anders als arithmetische Operationen bezeichnen, folgt, daß

1) $a - (b - c) = a + c - b$ und $a - (b + c)$ nicht gleich $a + c - b$ seye.

2) Eben so ist $(a - b) - (b - c) = a - (2b + c)$ und $(a - b (c - d) - (b + m) = (a - b) + (b + m) - (c - d) = (a + m) - (c - d) = (a + d + m) - c$.

3) Eben so kann man in Rücksicht der Multiplication und Division Transpositionen vornehmen, so ist z. B. wenn $ma = b$, $a = \frac{b}{m}$.

Ferner $\frac{a + b}{c - d} = m$, wird $a + b = m \times (c - d)$ u. s. w.

4) Ferner wird $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = 1 + \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, denn da die Größe $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$ nothwendig größer als die Einheit ist, und dieß um den Werth von x^2, so bleibt also nach geschehener Theilung $\frac{x^2}{a^2 - x^2}$ übrig.

5) Man hat auch angenommen, daß, wenn das Subtractionszeichen vor einem Exponenten steht, dieß eine Theilung der Einheit, durch die gegebene Größe, zur Würde des Exponenten erhoben anzeigt, so daß $\frac{1}{a^3} = 1 \times a^{-3}$, und $\frac{a+b}{c-d} = (a+b) \times (c-d)^{-1}$.

Die Bezeichnung der Glieder der Reihen.

1) In Hinsicht der Resultate haben also die Glieder der Reihen keine andere Zeichen, als jenes der Addition, und jenes der Subtraction, Reihen mir abwechselnden Zeichen können nach meiner Theorie nnicht eintretten. Auflösung des Bruches $\frac{a^2}{a^2-x^2}$ in eine Reihe.

Es ist $\frac{a^2}{a^2-x^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2-x^2}$ und

$$x^2 : a^2 - x^2 =$$

$$-\left(\frac{a^2x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^2}\right. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \text{ꝛc.}$$

$$-\left(\frac{a^2x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^4}\right) + \text{ꝛc.}$$

Folglich $\frac{a^2}{a^2-x^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} +$ ꝛc. Wenn $\frac{a^2}{a^2+x^2}$ gegeben wäre, so

erhält man eben so die Reihe für

$$\frac{a^2}{a^2 + x^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} - \text{rc.}$$

Von den Verhältnissen der Größen.

Alle Kenntnisse des Menschen gründen sich auf die Fähigkeit, die wahren Verhältnisse der Dinge zu bestimmen, welche er zu behandeln hat.

Von dem arithmetischen Verhältniß.

1) Die Vergleichung, welche man mit zweyen Größen in Rücksicht ihrer Differenz macht, heißt ein arithmetisches Verhältniß.

2) Wenn man zwey solche Verhältnisse miteinander vergleicht, so heißt dieses ein zusammengesetztes Verhältniß. Es ist daher, wenn $a - b = c - d$ ist, dieser Ausdruck ein zusammengesetztes arithmetisches Verhältniß.

Da nun in diesem Falle immer $a + d = b + c$ ist, so ist

3) Das allgemeine Resultat eines zusammengesetzten derley Verhältnisses, daß die Summe der äußern Glieder, gleich der Summe der mittlern seyn muß. D. i. wenn $a : b = c : d$ gegeben ist, so muß

$b + c = a + d$, und eben so $a - b = c - d$ seyn.

4) Daß der Antecedent (a) mehr oder weniger der Differenz, gleich dem Consequenten (b) seye, d. i. $a \pm d = b$.

5) Daß, wenn in einem arithmetischen zusammengesetzten Verhältniß eines der äußern Glieder unbekannt ist, man selbes gleich finden könne. Es seye durch x ausgedrückt, so wird $a : b = c : x$, folglich $a + x = b + c$ und $x = (b + c) - a$.

6) Man uennt $a : b = b : c$ ein fortgesetztes Verhältniß, in demselben ist also die Summe der äußern Glieder, gleich dem doppelten eines der mittlern Glieder, d. i. $a + c = 2b$.

7) Um das mittlere arithmetische Proportionalglied zwischen zwey Größen zu finden, wird, wenn dieses durch x ausgedrückt wird, $a : x = x : b$, und $a + b = 2x$; $x = \frac{a + b}{2}$.

8) Wenn das erste Glied eines arithmeeischen Verhältnisses fortgesetzt wird, so wie $a : a \mp d : a \mp 2d : a \mp 3d$ 2c., so heißt dieses eine arithmetische Reihe.

9) In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe der Glieder, welche von den mitt-

leren gleichweit entfernt sind, der Summe derselben gleich, wenn die Zahl derselben eine gerade Zahl ist, ist sie eine ungerade, so sind sie der doppelten des mittleren gleich.

So ist $a : a \pm d : a \pm 2d : a \pm 3d : a \pm 4d : a \pm 5d$: . O, die Summe der mittleren $a \pm 2d + a \pm 3d = 2a \pm 5d$, die Summe der äußeren $a + a \pm 5d = 2a \pm 5d = 2a \pm 5d$.

10) Man wird also in einer jeden arithmetischen Reihe ein unbekanntes Glied, welches es auch seye, finden können, wenn man das erste Glied, die Differenz, und die Zahl der Glieder kennt. Denn man siehet aus der Formel, daß von dem ersten Glied und von dem Product der allgemeinen Differenz mit der Zahl der vorhergehenden Glieder, weniger dem ersten, welches schon bestimmt ist, auch dieses Glied bestimmt werden müsse: Wenn wir dasselbe ω nennen, so wird $w = a \pm d\,(n - 1)$.

11) Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe, ist gleich dem Product der Summe der äußern Glieder, mit der Hälfte der Zahl der Glieder. Da nun die Summe der äußern Glieder $a + w$ ist, so ist die Summe aller Glieder $S = (a + \omega)\,\frac{n}{2} = \frac{an + wn}{2}$.

12) Wenn zwey Glieder einer solchen Reihe gegeben sind, und man eine Zahl m von Glieder zwischen selbe einschalten will, so würde da $w = a + d(n - 1)$, folglich $w - a = d(n - 1)$ und in diesem Falle $n = m + 2$ ist, $\frac{w - a}{m + 1} = d$ seyn u. s. w.

Von dem geometrischen Verhältniß.

1) Die Vergleichung, welche man mit zwey Größen, in Rücksicht ihres Quotienten macht, heißt ein geometrisches Verhältniß.

2) Wenn man zwey solche Verhältnisse miteinander vergleicht, so heißt dieß ein zusammengesetztes Verhältniß. Es ist daher $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ der allgemeine Ausdruck eines geometrischen Verhältnisses.

Da nun in diesem Falle immer $ad = bc$; so ist

3) Das allgemeine Gesetz eines geometrischen Verhältnisses, daß in demselben das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich ist: und daß folglich der Quotient des ersten Gliedes in dem zweyten, oder des zweyten in dem ersten, ienen des dritten in dem vierten, oder umgekehrt

gleich ist. Man benennt und bezeichnet ein solches Verhältniß, wie das arithmetische, d. i. $a : b = c : d$, wenn nun q den Quotienten ausdrückt, so wird $a : aq = c : cq$ und $aqc = aqc$.

4) Aus diesen siehet man ferner, daß es leicht seyn wird, wenn drey Glieder eines geometrischen Verhältnisses gegeben sind, das vierte zu finden, denn es wird $a : b = c : x$, folglich $x = \frac{bc}{a}$.

5) Wenn dieses Glied ein mittleres ist, so wird $a : b = x : c$, und $ac = bx$, und $x = \frac{ac}{b}$.

6) Wenn ein Verhältniß, wie $a : b = b : c$ gegeben ist, so heißt dieß ein fortgesetztes geometrisches Verhältniß, und in demselben ist das Product der äußern gleich dem Quadrat des mittlern, d. i. $ac = b^2$.

7) Man kann also die Glieder einer geometrischen Proportion versetzen wie man will, so lange das Product der äußern dem Product der mittlern gleich bleibt.

8) Nun wollen wir den allgemeinen Ausdruck der geometrischen Reihen suchen: Sie sind eine Reihe von Gliedern, welche in einem gleichen Verhältniß unter sich

stehen, das durch ihren Quotienten angezeigt wird.

Die folgende Formel kann also eine geometrische Reihe ausdrücken:

$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 \text{ - - - - - - - } : aq^{n-1}$.

9) In dieser Formel siehet man ferner, daß sich das erste Glied zum dritten, wie das Quadrat des ersten Gliedes zum Quadrat des zweyten verhalte, d. i. $a : aq^2 = a^2 : a^2q^2$, und überhaupt zwey Glieder einer Reihe verhalten sich gegeneinander, wie das erste zum zweyten, zu einer Würde erhoben, deren Exponennt der Entfernung der gegebenen Glieder gleich ist.

10) Aus dieser nämlichen Formel siehet man ferner, daß, was immer für ein Glied, dem Product des ersten Gliedes, multiplicirt mit dem Quotienten zu einer Würde erhoben, welche der Zahl der vorhergehenden Glieder weniger 1 gleich ist.

Wenn folglich w dieses Glied, und n die Zahl der Glieder ist, so wird $w = aq^{n-1}$.

11) Es seye ferner s die Summe der Glieder einer geometrischen Reihe, von welcher man das erste und das letzte Glied kennt, und q deren Quotient, so wird $s - w$

die Summe aller Antecedenten seyn, eben so ist die Summe aller Consequenten s — a.

12) Daß in einer geometrischen Reihe sich die Summe aller Antecedenten, zur Summe aller Consequenten verhält, wie ein Antecedent zu seinem Consequenten, d. i.
$s - w : s - a = a : aq$ und $s = \frac{wq - a}{q - 1}$.

Von den Logarithmen.

1) Die Logarithmen sind Glieder einer arithmetischen Reihe, welche Glied vor Glied mit einer geometrischen correspondiren.

2) Es seye a eine Zahl, welche etwas größer als die Einheit ist; ferner seye m der Exponent der Würde, auf welche a erhoben wird, so daß $a^m = b$, so ist m der Logarithmus von b, folglich $m = Lb$, es seye ferner $a^n = c$, so wird $n = Lc$, wenn man nun die beyden Gleichungen miteinander multipliciret, so bekömmt man $a^m \times a^n = a^{m+n} = bc$, es ist aber $m + n = L.bc$, und die Summe dieser beyden Gleichungen $m + n = Lb + Lc$, es ist also $L.bc = Lb + Lc$.

3) Es seye $b = c$, so wird $Lb^2 = Lb + Lb = 2Lb$, und überhaupt Lb^m

$= mLb$, folglich der Logarithmus irgend einer Potenz ist das Product des Logarithmus seiner Wurzel m mal. Aus diesem folgt

$$Lab = La + Lb.$$

$$L\frac{a}{b} = La - Lb.$$

$$La^{m} = mLa.$$

$$La^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}Lb.$$

$$L\frac{ab+bc}{m+n} = Lb + L(a+c) - L(m+n)$$

$$L\frac{ax^{m}}{r^{n}} = La + mLx - nLr.$$

$$L\sqrt{(x^2+y^2)} = \tfrac{1}{2}L(x^2+y^2).$$

$$L\sqrt{(x^2-y^2)} = \tfrac{1}{2}L(x+y) - \tfrac{1}{2}L(x-y).$$

$$L(a^2-x^2) = L(a+x) + L(a-x).$$

$$L\sqrt[n]{(a^2-x^2)^m} = \frac{m}{n}L(a-x) + \frac{m}{n}L(a+x).$$

$$L3a^2 + La^4 + 5L3 = L3 + 2La + 4La + 5L3 = 6L3a$$ u. s. w.

Von den Gleichungen.

Der Zweck algebraischer Gleichungen ist, aus bekannten, unbekannte Größen zu entwickeln.

Gleichungen vom 1ten Grad.

Die Summe zweyer Zahlen, und deren Product ist gegeben, die beyden Zahlen zu finden.

Es seye x die grössere, y die kleinere der beyden Zahlen, s deren Summe, d deren Differenz, so ist $x + y = s$, $x - y = d$.

Die Summe dieser Gleichungen ist also $2x = s + d$, $x = \frac{s+d}{2}$ und $y = \frac{s-d}{2}$. Das übrige wollen wir umgehen.

Gleichungen vom 2ten Grad.

Alle mögliche Fälle der Gleichungen vom zweyten Grade lassen sich auf folgende reduciren.

I. $(x - a) . (x - a) = (x^2 - ax) - (ax - a^2) = 0$. Reine quadratische Gleichung $(x - a) . (x - b) = (x^2 - ax) - (bx - ab) = (x^2 - (a + b) x - ab) = 0$.

II. $(x + a) . (x - a) = (x^2 + ax) - (ax + a^2) = (x^2 - a^2) = 0$. (1) $(x + a) . (x - b) = (x^2 + ax) - (bx + ab) = (x^2 + (a - b) x - ab) = 0$.

III. $(x - a) \cdot (x + a) = (x^2 - ax) + (ax - a^2) = (x^2 - a^2) = 0$. Identisch mit (1) $(x - a) \cdot (x + b) = (x^2 - ax) + (bx - ab) = (x^2 - (a - b) x + ab) = 0$.

Setzt man in I. 2a und $a + b = s$, a^2 und $ab = p$, in II. und III. $a - b = d$, so erhält man folgende drey Formeln:

I. $x^2 - sx - p = 0$. II. $x^2 + dx - p = 0$. III. $x^2 - dx + p = 0$.

Auflösung der Formeln I. II. III.

Aufgabe. Die Summe und das Product zweyer Zahlen ist gegeben, die beyden Zahlen zu finden.

Auflösung. Es seye x die größere, y die kleinere, so ist $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$, $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$. Deren Product $xy = \frac{1}{4}s^2 \pm \frac{1}{4}d^2 = p$. Folglich $\frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}s^2 - p$, und also die Formel für alle Gleichungen in I. zur Bestimmung von x.

I. $x = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$. $y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$.

Da nun $\frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}s^2 - p$, so ist $\frac{1}{4}d^2 + p = \frac{1}{4}s$. Es ist also auch

II. $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}d^2 + p}$. $y = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}d^2 + p}$.

Anwendung.

Man suche zwey Zahlen, deren Summe, Producte und die Differenz ihrer Quadrate gleich sind.

Die größere seye x, die kleinere y, so ist $x + y = xy = x^2 - y^2$.

Aus $x + y = xy$ erhält man $y = xy - x$, oder $y = x(y - 1)$ und $x = \frac{y}{x-1}$. Es ist also $x + y = xy = \frac{y^2}{y-1}$. Es ist aber $\frac{y^2}{y^2 - 2y + 1} - y^2 = \frac{y^4 - 2y^3}{y^2 - 2y + 1} = \frac{y^2}{y-1}$, durch y^2 getheilt, giebt $\frac{y^2 - 2y}{(y-1)^2} = \frac{1}{y-1}$, mit $y - 1$ multiplicirt, giebt $\frac{y^2 - 2y}{y-1} = 1$, dieses wiederholt, giebt $y^2 - 2y = y + 1$, und $y^2 - y = 1$, und $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, folglich $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Q. E. D. Ferner

1) $x^2 - 24x - 144 = 0. = (x - 12).(x - 12) = (x^2 - 12x) - (12x - 144)$, reducirt giebt $x^2 - 24x = 144$. Die

Formel I zur Auflösung giebt $\frac{1}{2}s = 12$, $\frac{1}{4}s^2 = 144$. $p = 144$, folglich $x = y = 12$.

2) $x^2 - 20x - 75 = 0 = (x - 15).(x - 5) = (x^2 - 15x) - (5x - 75)$, reducirt giebt $x^2 - 20x = 75$. Die Formel I zur Auflösung giebt $\frac{1}{2}s = 10$. $\frac{1}{4}s^2 = 100$. $p = 75$ und $\sqrt{100 - 75} = 5$. Folglich $x = 15$. $y = 5$.

3) $x^2 - 144 = 0 = (x + 12).(x - 12) = (x^2 + 12) - (12x + 144)$, reducirt giebt $x^2 - 144 = 0$. Die Formel I zur Auflösung giebt $\frac{1}{2}d = 0$. $\frac{1}{4}d^2 = 0$. $p = 144$, folglich $x = \sqrt{144} = 12$. $y = 12$.

4) $x^2 + x - 132 = 0. = (x + 12).(x - 11) = (x^2 + 12x) - (11x - 132)$, reducirt giebt $x^2 + x = 132$. Die Formel II zur Auflösung giebt $\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}$. $p = 132$. und $\sqrt{\frac{1}{4} + 132} = 11 + \frac{1}{2}$, folglich $x = 12$. $y = 11$.

5) $x^2 - x + 132 = 0. = (x - 12).(x + 11) = (x^2 - 12x) + (11x - 132)$, reducirt giebt $x^2 - x = 132$. Die Formel II zur Auflösung giebt $x = 12$. $y = 11$.

6) $x^2 - 10x - 30 = 0$. Die Auflösung dieser Gleichung ist unmöglich, weil die Größe 10 keine Factoren hat, deren Product 30 ist.

Ist diese Ursache nicht wahr, nicht hinreichend? ;;; —.

Gleichungen vom 3ten Grad.

Alle mögliche Fälle der Gleichungen vom dritten Grad lassen sich auf folgende reduciren:

I.
$$\begin{cases} (x-a)(x-a)(x-a) = [x^3 - 3ax^2] - [3a^2x - a^3] = o. \text{ Reine Kub. Gleich.} \\ (x-a)(x-a)(x-b) = [x^3 - (2a + b)x^2] - [(2a^2 + 2ab)x - a^2b] = o \\ (x-a)(x-b)(x-c) = [x^3 - (a + b + c)x^2] - [(ab + bc + ac)x - abc] = o. \end{cases}$$

II.
$$\begin{cases} (x + a)(x + a)(x - a) = [x^3 + ax^2] - [a^2x + a^3] = x^3 - a^3 = o \ (1) \\ (x + a)(x + a)(x - b) = [x^3 + (2a - b)x^2] + [(a - 2ab)x - a^2b] = o \\ (x + a)(x + b)(x - c) = [x^3 + (a + b - c)x^2] + [(ab - (ac + bc))x - abc] = o. \end{cases}$$

III.
$$\begin{cases} (x-a)(x-a)(x + a) = [x^3 - ax^2] + [a^2x - a^3] = x^3 - a^3 = o. \text{ S. mit } (1) \\ (x-a)(x-a)(x + b) = [x^3 - (2a - b)x^2] + [(a^2 - 2ab)x - a^2b] = o \\ (x-a)(x-b)(x + c) = [x^3 - [(a + b) - c)x^2] + [(ab - (ac + bc)] x - abc) = o. \end{cases}$$

Setzt man in I. die Coefficienten von x^2 und x gleich m und n, und zwar in II. und III. gleich r und u, das Product $= p$, so erhält man

I. $[x^3 - mx] - [nx - p] = o.$
II. $[x^3 + rx^2] - [ux + p] = o.$
III. $[x^3 - rx^2] + [ux - p] = o.$

Eliminirung des zweyten Gliedes.

Die Gleichung $[x^3 - mx^2] - [nx - p] = o$ ist gegeben, man soll mx^2 eliminiren machen.

Es seye ein Factor der Gleichung $\frac{m}{3}$, so daß $x - \frac{m}{3} = o$, und $x - \frac{m}{3} = y$ und $x = y + \frac{m}{3}$ wird: so ist $x^3 = (y^3 + my^2 + \frac{1}{3}m^2y + \frac{1}{27}m^3)$.

Ferner ist $mx^2 = (my^2 + \frac{2}{3}m^2y + \frac{1}{9}m^3)$ und $nx = (ny + \frac{1}{3}mn)$ und endlich $p = p$. Verbindet man nun die Glieder dieser Gleichung nach dem herrschenden Gesetz, so ist $[(y^3 + my^2 + \frac{1}{3}m^2y + \frac{1}{27}m^3) - (my^2 + \frac{2}{3}m^2y + \frac{1}{9}m^3)] - [(ny + \frac{1}{3}mn) - p] = o.$

Reducirt giebt $y^3 - (\frac{1}{3}m^2 - n)y - \frac{2}{27}m^3 - \frac{1}{3}mn - p = o.$ Man kann also die Formeln in I. II. und III. auf folgende reduciren

I. $x^3 - 3px + s = o.$ II. $x^3 + 3px - s = o.$ III. $x^3 - 3px - s = o.$

Cardanis allgemeine Formel zur Auflösung vom 3ten Grad.

$$\text{I. } x = \sqrt[3]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}} + \sqrt[3]{\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}}.$$

Anwendung.

1) $(x^3 + x^2 - 34x) + 56 = 0$ oder $x^3 + x^2 - 34x - 56 = 0$. Die Factoren $(x-2).(x-4).(x+7) - [x^3 - 6x^2 - 8x] + [7x^2 - 42x - 56] = x^3 + x^2 - 34x = 56$.

2) $(x^3 - 6x^2 - 11x - 6) = 0$. Die Factoren dieser Gleichung sind $(x-3)(x-2)(x-1) = (x^3 - 3x^2 - 2x) - (3x^2 - 9x - 6) = x^3 - 6x^2 - 11x = 6$.

3) $(x^3 - x) = 6$. Diese Gleichung entstehet aus den Factoren $(x^2 + 2x + 3)(x-2)$.

4) $(x^3 + x^2 - 34x - 56) = 0$. Die Factoren dieser Gleichung sind $(x^3 + 4).(x+2).(x-7) = [x^3 + 6x^2 + 8] + [7x^2 - 42x - 56] = [x^3 + x^2 - 34x - 56) = 0$.

5) $(x^3 - 8)$. Die Factoren dieser Gleichung sind $(x-2).(x-2).(x+2) = [x^3 - 2x^2] + [4x - 8]$.

6) $(x^3 - 2x^2] + [4x - 8] = 0$. Diese Gleichung resultirt aus den Factoren $(x+2)(x+2)(x-2)$.

7) $x^3 - 3x = 2$. Die Formel I. zur Auflösung giebt $3p = 3$, $p = 1$, $s = 2$, folglich $x = 1 + 1 = 2$.

8) $x^3 - 9x = 28$. Die Formel zur Auflösung giebt $x = 3 + 1 = 4$.

9) $x^3 - 18x = 35$. Die Formel zur Auflösung giebt $x = 3 + 2 = 5$.

Möchten doch diejenigen, welche sich rühmen, meine Theorie widerlegen zu können, von einem Satze zum andern, von einem Resultate zum andern, zeigen, wo ich logisch oder mathematisch irre.

Anwendung

der

allgemeinen Arithmetik

auf

Goneometrie.

Einleitung.

Wenn man den Kreis mittels seines Durchmessers in zwey Theile theilt, und den einen Theil einen positiven, und den andern einen negativen Halbkreis nennt, so ist, wenn dieses (+) und (—) jenes ist, nach welchen $+ a - a = 0$ ist, die Summe der beyden Ordinaten, welche im Kreis zu derselben Abscisse gehören, $[\pm y = \pm \sqrt{2ax - x^2}] = 0$. (Man beliebe mir einen mathematisch logischen Beweis zu geben, was der Unterschied von $- \sqrt{2ax - x^2}$, und $\sqrt{-(2ax - x^2)}$ seye, den willkührlichen Satz, durch welchen diese beyden Werthe der Ordinate $-y$ unterschieden werden, kenne ich selbst; eine Wissenschaft aber ist nicht eine Reihe willkührlicher, sondern eine Reihe solcher Sätze, welche ununterbrochen, und ohne logische Widersprüche aus einem Axiom deducirt werden, und so sich selbst

zum Axiom erheben). Wir hätten also in jedem Kreis zwey correspondirende Ordinaten auf jedem Punct des Durchmessers, deren Summe Null ist, wo doch diese Summe der ganzen Sehne gleich ist.

Eben so verhielte es sich mit der Parabole, wo eben so die Gleichung durch den Parameter ausgedrückt $+\sqrt{px} - \sqrt{px} = \pm y = 0$ wäre.

So wäre ferner der Flächeninnhalt der Ellipse

$$+2\left(ab - \frac{ab}{6} - \frac{ab}{40} - \frac{ab}{112} - \frac{5ab}{1152} - \&\right) - 2\left(ab + \frac{ab}{6} + \frac{ab}{40} + \frac{ab}{112} + \frac{5ab}{1152} + \&\right) = 0$$

Nicht besser gienge es mit der Körperrechnung. Man erhielte nämlich für die Sphäre

$$\pm\left(\frac{a^2c}{r} \times \frac{a}{3}\right) = 0.$$

Für das Ellipsoid und dessen correspondirenden Cylinder

$$\pm \tfrac{1}{3} \times \frac{abc}{r} \text{ und } \pm \tfrac{1}{2} \times \frac{abc}{r} = 0.$$

So wären dann alle Werthe, der Summen correspondirender Ordinaten, Flächen und Körper Null. Man wird mir einwenden, es sey dieses nicht, sondern die

Zeichen (+) und (—) bezeichnen in der Geometrie nur Richtungen: Gut. Warum gebraucht man aber zur Bezeichnung so ganz verschiedener Begriffe dieselben Zeichen? Um Verwirrung und Widersprüche zu häufen.

Der Versuch, die Wahrheit einer Theorie, nach welcher + sin. α — sin. α = 0 wird, durch jene, nach welcher + sin. α — sin. α = 2 sin. α wird, darthun zu wollen, verdient keine Widerlegung, er widerlegt sich durch sich selbst.

Anwendung
meiner Theorie auf Trigonometrie.

Vermög den Eigenschaften rechtwinktlichter Dreyecke erhalte ich eben so wie gewöhnlich, die Werthe der ersten trigonometrischen Linien im Verhältniß des Radius, und aus eben solchen geometrischen Wahrheiten folgere ich die Werthe, der Summe, Differenz, Produkte u. s. w. von zweyen und einem Winkel, lauter durch geometrische Constructionen erweisliche Resultate, welche, wie die ganze Geometrie,

mit dem Begriff des positiven und negativen, im Widerspruche stehen. Den Beweis hieher zu setzen, halte ich für unnöthig, er stehet z. B. in Le Gendre Elements de Geometrie, wie vorsätzlich nach meiner Theorie bearbeitet, d. i. durch keine andere Hilfsmittel, als allgemeine Zeichen für die Größen, und allgemeine Zeichen für die Operationen deducirt.

Ich erhalte also

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$

2) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$

3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

Eben so finde ich die drey Formeln zur Auflösung eines jeden Dreyecks aus Seiten und Winkel:

1) $\sin A : \sin B = a : b$

2) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ und

3) $b + c : b - c = \tang \frac{1}{2} B + C : \tang \frac{1}{2} B - C.$

Anmerk. Ich setze nur die obigen vier Formeln hieher, weil ich zur Entwicklung goniometrischer Grundformeln nicht mehr als diese brauche, und Kürze mir Gesetz ist.

Analysis polygoniometrischer Formeln.

Fig. 1. Die Werthe der Winkel $\alpha = 2R - A$. $\beta = A + B - 2R$. $\gamma = bR - (A + B + C)$. $\delta = (A + B + C + D) - 6R$; $\varepsilon = 10R - (A + B + C + D + E)$ sind constructiv.

Anmerk. Ich erwarte, daß der Leser, welchen dieser kleine Versuch interessirt, von hier aus meine Verfahrungsart, mit der allerdings vortrefflichen Abhandlung über Goniometrie vom Hrn. Prof. Däzl vergleiche.

Die Breite der Figur im Punct F ist Null, folglich $a \sin\alpha - b \sin\beta + c \sin\gamma - d \sin\delta + e \sin\varepsilon = 0$. Dessen Quadrat

$$[a^2 \sin\alpha - ab \sin\alpha \sin\beta + ac \sin\alpha \sin\gamma - ad \sin\alpha \sin\delta + ac \sin\alpha \sin\varepsilon] -$$

$$[ab \sin\alpha \sin\beta - b^2 \sin^2\beta + bc \sin\beta \sin\gamma - bd \sin\beta \sin\delta + bc \sin\beta \sin\varepsilon] +$$

$$[ac \sin\alpha \sin\gamma - bc \sin\beta \sin\gamma + c^2 \sin^2\gamma - dc \sin\gamma \sin\delta + ec \sin\gamma \sin\varepsilon] -$$

$$[ad \sin\alpha \sin\delta - bd \sin\beta \sin\delta + cd \sin\gamma \sin\delta - d^2 \sin^2\delta + ed \sin\delta \sin\varepsilon] +$$

$$[ae \sin\alpha \sin\varepsilon - bc \sin\beta \sin\varepsilon + ec \sin\gamma \sin\varepsilon - de \sin\delta \sin\varepsilon + e^2 \sin^2\varepsilon]$$

Wird nun nach den von den Operationszeichen angezeigten Gesetzen addirt und reducirt, so erhält man

$a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta + c^2 \sin^2 \gamma + d^2 \sin^2 \delta + e^2 \sin^2 \varepsilon - 2ab \sin \alpha \sin \beta + 2ac \sin \alpha \sin \gamma - 2ad \sin \alpha \sin \delta + 2ae \sin \alpha \sin \varepsilon - 2bc \sin \beta \sin \gamma + 2bd \sin \beta \sin \delta - 2be \sin \beta \sin \varepsilon - 2cd \sin \gamma \sin \delta + 2ce \sin \gamma \sin \varepsilon - 2de \sin \delta \sin \varepsilon$. Verfährt man eben so mit $[a \cos \alpha + b \cos \beta + \ldots \&]^2$, und addirt die beyden Quadrate, so wird $AF^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab \cos(\alpha + \beta) + 2ac \cos(\alpha + \gamma) + 2ad \cos(\alpha + \delta) + 2ae \cos(\alpha - \varepsilon) + 2bc \cos(\beta + \gamma) + 2bd \cos(\beta - \delta) + 2bc \cos(\beta + \varepsilon) + 2cd \cos(\gamma + \delta) + 2ce \cos(\gamma - \varepsilon) + 2de \cos(\delta + \varepsilon)$.

Substituirt man die Werthe dieser Winkel durch äußere, so ist endlich

$AF^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab \cos B + 2ac \cos(B + C) + 2ad \cos(B + C + D) + 2ae \cos(B + C + D + E) + 2bc \cos C + 2bd \cos(C + D) + 2be \cos(C + D + E) + 2cd \cos D + 2ce \cos(D + E) + 2de \cos E$.

Ferner ist durch eine sehr einfache Construction erweislich, daß (Fig. 5.) im Dreyeck I. die Seite

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A},$$

und im Dreyeck II. die Seite

$$a^1 = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$$

seye; die Formel wird also für den vom Hrn. Prof. Däzl gegebenen Fall (S. 99) folgende:

$AF^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2ab \cos B - 2ac \cos (B + C) + 2ad \cos (B + C + D) + 2ae \cos (B + C + D + E) + 2bc \cos C - 2bd \cos (C + D + E) - 2cd \cos D - 2ce \cos (D + E) + 2 de \cos E.$

Anmerkung. Man sieht, daß sich geometrische Wahrheiten immer und einfacher nach Grundsätzen reiner Vernunft entwickeln lassen, als nach den Grundsätzen einer Theorie, welche nichts als eine Reihe ungereimter Widersprüche ist.

Warum bey der Entwicklung dieser polygoniometrischen Grundformel nicht der Weg gegangen wurde, den ich oben gezeigt habe, ist um so mehr befremdend, da er ungleich kürzer und wahrer ist, als der dort gegebene.

Man beobachte das Quadrat von $a \sin \alpha - b \sin \beta + \ldots$ &, so wird man sich überzeugen, wie streng die Bedingung

erfüllt ist, nach welcher das Resultat einer jeden Multiplication eine Größe seyn muß, welche sowohl nach Zahl, als nach den Gesetzen der Verbindung der Glieder der Factoren, dem Product dieser Factoren gleich ist.

Diese wenigen und höchst einfachen Gesetze sind die Grundlage meiner Theorie: Allgemein verständliche, allgemein anerkannte Wahrheiten. Wem solche Grundsätze als Basis einer Wissenschaft excentrisch scheinen, der steht in einem viziösen Kreis, und verdient das Mitleid eines jeden Denkers.

Analysis und Construction der Formel S. 110.

Fig. 4. Nach diesen von mir aufgestellten Grundsätzen erhält man für den Flächeninnhalt der gegebenen Figur

$Ab = a \cos \alpha$. $Bb = a \sin \alpha$. $Bm = b \cos \beta$. $Cm = b \sin \beta$ $Ec = e - (a \cos \alpha + \cos \beta)$. $nc = a \sin \alpha + b \sin \beta - c \sin y$. Folglich

$2ABb = a^2 \cos\alpha \sin\alpha$. $2BCm = b^2 \cos\beta \sin\beta$. $2DCn = c^2 \cos y \sin y$. $2Bbcm = 2ab \sin\alpha \cos\beta$. $2DncE = c \cos y + (e - a\cos\alpha + b\cos\beta) \times (a \sin\alpha + b\sin\beta - c\sin y)$. Folglich $2S = a^2 \cos\alpha \sin\alpha + b^2 \cos\beta \sin\beta + c^2 \cos y \sin y + 2ab \sin\alpha \cos\beta) + (ac \cos y \sin\alpha + \beta c \cos y \sin\beta - c^2 \cos y \sin y) + [e(a\sin\alpha + b\sin\beta - c\sin y)] - [(a^2 \cos\alpha \sin\alpha + ab\cos\alpha \sin\beta - ac \cos\alpha \sin y) + (ab \cos\beta \sin\alpha + b^2 \cos\beta \sin\beta - bc\cos\beta \sin y)]$.

Reducirt giebt $e(a\sin\alpha + b\sin\beta - c \sin y) + (a(b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha - y)) + bc\sin(\beta + y)$.

Substituirt man die Werthe der Winkel $\alpha, \beta, y \ldots \&$, so wird der Flächeninnhalt der gegebenen Figur
$e) a\sin A + b\sin A + B) - c\sin(A + B + C) + a(b\sin B + c\sin(B+C)) + bc\sin C$.

Geometrische Construction.

Der doppelte Flächeninnhalt des Fünfecks a, b, c, d, e, ist gleich der Summe der Flächen (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)

$= 2S$. Nun ist die Fläche $1 = e(a \sin \alpha + b \sin \beta - c \sin y)$. $2 = (a c \sin y \cos \alpha - a b \sin \beta \cos \alpha)$. $3 = (b c \sin y \cos \beta)$. $4 = (b c \sin \beta \cos y)$. $5 = (a c \sin \alpha \cos y)$ und $6 = (a b \sin \alpha \cos \beta)$. Addirt man die Werthe aller dieser einzelnen Flächen, und ordnet die Größen nach den Winkeln, so erhält man

$2S = e(a \sin \alpha + b \sin \beta - c \sin y) + a (b \sin(\alpha + \beta) + c \sin(\alpha - y)) + b c \sin (\beta + y)$. Und folglich wieder

$$2S = c(a \sin A + b \sin(A + B) - c \sin (A + B + C) + a(b \sin B + c \sin(B + C)) + b(c \sin C.$$

Es seyn $a = 463$. $b = 486$. $c = 351$. $e = 753$ Winkel $A = 104°.\ 7'.\ 30''.\ 24'''$. $B = 101°.\ 36'.\ 23''.\ 36'''$. $C = 289°.\ 46'$, man soll den Werth von $2S$ bestimmen. Ich erbitte mir die Auflösung von meinen Herren Recensenten!!!

Aus obiger Gleichung folgt unmittelbar für den gegebenen Fall

$$e = \frac{aS - [a(b \sin B + c \sin(B + C) + b c \sin C]}{a \sin A + b \sin(A + B) - c \sin(A + B + C)}$$

Mir erlaubt meine beschränkte Zeit nicht, mich mit einer mehreren Verglei- chung der aus diesen beyden Grundformeln

resultirenden Deductionen abzugeben, ich muß diese Fähigkeit meinem Leser zutrauen, und kann dieses um so leichter, da ich nicht viel fordere. Ich erwarte nicht, daß einer unter ihnen das, was in diesen wenigen Zeilen liegt, verkennen werde. Es ist der stärkste Beweis der Wahrheit und Einfachheit meiner Theorie, und, wie ich hoffe, die Todesglocke eines Lehrgebäudes, welches für das Fortschreiten des menschlichen Geistes das ist, was eine Schule seyn würde, wo von öffentlichen Lehrern die Existenz von Hexen und Gespenstern docirt würde.

Anhang.

Nun erlaube man mir noch einen Vergleich einiger trigonometrischer Auflösungen von polygonometrischen Aufgaben, mit den polygonometrischen Auflösungen.

Aufgabe. Fig. 1. Im Sechseck A, B, C, D, E, F, sind alle Seiten und Winkel, ausgenommen die Seite AF und die Winkel A und F gegeben, diese zu finden.

Auflösung. Die schwarz gezogenen Kreisbogen und Linien bezeichnen die gegebenen Seiten und Winkel, die punctirten, die berechneten Seiten und Winkel, so sieht man ohne weiters, daß die gesuchten Winkel und die Seite unmittelbar, und zwar für alle Fälle Fig. 1. 2. 3. bekannt sind.

Es seye z. B. Fig. 3. die Seite a = 410. b = 251. d = 321. e = 171. Winkel B′ = (180° − 91° 55′) = 88°. 5′. C′ = (180 − 74°. 36′) = 105°. 24′ D′ = (233°. 41′ − 180°) = 53°. 41 E′ = 180° − 53″. 12′ = 126°. 48′. So ist

Dreyeck I.

Winkel A = 88°. 5′. B′ = 59°. 55′. 40″.
C = 31°. 59′. 20″.
Seite a = 473,5. b = 410. c = 251.

Dreyeck II.

Winkel A′ = 112°. 29′. 50″. B′ = 53°. 41.
C′ = 13°. 49′. 10″.
Seite a = 321. b = 279,9. c = 83.

Dreyeck III.

Winkel A′ = [(105°. 24′) − 59°. 55′. 40″) + (112°. 29′. 50″)] = 157°. 55′. 10″.
B′ = 13°. 52′. 45″ C′ = 8°. 9′. 5″.
Seite a = 740,3. b = 473,5. c = 279,9.

Dreyeck IV.

Winkel A' = [126°. 48' + (13°. 52'. 45" — 13°. 49'. 10")] = 126°. 51'. 30". B = 43°. 54'. 40". C = 9°. 13'. 50".

Seite a = 853,9. b = 740,3. c = 171.

Es ist also Winkel α = 31°. 59'. 20" + 8°. 9'. 15" — 9°. 13'. 50") = 30°. 54'. 45".

Nach Herrn Prof. Däzl α = 30°. 55'. AF = 854,1.

Da hier zwey polygoneometrische Aufgaben auf einmal und kürzer aufgelößt werden, als jede einzelne nach der polygoneometrischen Methode, so wird wohl die trigoneometrische Methode den Vorzug verdienen.

Aufgabe. Es ist der Flächeninnhalt des Dreyecks ABZ, nebst den Seiten und Winkeln, ausgenommen die Seite EF, wie oben gegeben, die Fläche ZCDEF, die Seiten AF und EF, nebst den Winkeln A und F zu bestimmen.

Auflösung. Der Flächeninnhalt des Dreyecks ABZ seye = 49623, so ist, da ABC = 51422. ABC — ABZ = 51422 — 49623 = 1800. Theilt man diesen Flächeninnhalt durch die Basis AD =

473,5, so erhält man für die Höhe des Dreyecks 7',8. Nun ist vermög

L. sin 59°. 55'. 40'' : L. sin tot. = L. 7,8 : L. 9, 1 = CZ alles übrige bestimmt.

Wäre aber statt dem Flächeninnhalt des Dreyecks ABZ, nur das Verhältniß der beyden Flächen gegeben, so berechne man das Dreyeck ABC = 51422 und das Viereck CDEF = 29989. Nun folgere man

L. 14295 : L. 10000 = L. 51422 : L. 35972.

Man findet also, da die Höhe des Dreyecks AEG = 105,4 ist, für AX = 951', und für den dieser Seite entgegen stehenden Winkel 146°. 15'. 30''. Es kömmt also nur darauf an, durch einen Versuch die beyden gegebenen Flächen im gegebenen Verhältniß so zu modificiren, daß die aus ihnen berechnete Seite AX = AF wird, welches ist, wenn sie dem gegebenen Winkel E entspricht.

Hätte man z. B. den Versuch mit 51422 — 1500 = 4922 gemacht, so daß also vermög

L. 14295 : L. 10000 = L. 49922 : (L. 34923 = ZCDEF)

wäre, so würde man der Wahrheit schon ziemlich nahe seyn.

Denn man erhielte für den Flächeninnhalt des Dreyecks AEX' = AEG + AGX' = 44162,6 + 1500 + 4934 = 50596. Für dessen Höhe 50596 : 740 = 65,6 × 2 = 136,6. Berechnet man nun aus AC = 473 die Höhe des Dreyecks AZC = 1500, so erhält man für dieselbe 6',3; man kennt also auch den der Höhe des Dreyecks AEX' entgegen stehenden Winkel, und aus diesem, dem Rechten, und der Höhe, die Linie AX', welche AF werden soll. Berechnet man nun aus den zwey Weiten AX', AE', und den eingeschlossenen Winkel, den der Seite AX' = 865,3 entgegenstehenden Winkel, so erhält man für denselben 129°. 53'. 40''; da man also weiß, daß die Verminderung der Fläche ABC um 1500, eine Veränderung des, der Seite AX' entgegenstehenden Winkels 146°. 15'. 30'' von 146°. 15'. 30'' — 129°. 53'. 40'' = 16°. 21'. 50'' hervorbrachte, so wird es auch dem Beschränktesten leicht seyn, diese Fläche so zu verbessern, daß die beyden im gegebenen Verhältniß stehenden Flächen von einer Seite AF begränzt werden, welche dem gegebenen Winkel E im Dreyeck AEF entspricht. Die Auflösung dieser Aufgabe ist also trigonometrisch möglich und nicht, wie behauptet wird, unmöglich.

Druckfehler.

Pag. 25 Zeile 17 (und $Bn = b \cos. \beta$ bleibt ganz weg.

— — Zeile 19 $\delta = (C - \varphi)$, und $y = (R - \delta)$ statt $S = (C - \varphi)$ und $y = (R - S)$.

Pag. 26 Zeile 25 gG statt gB.

ig.A

Fig. 6.

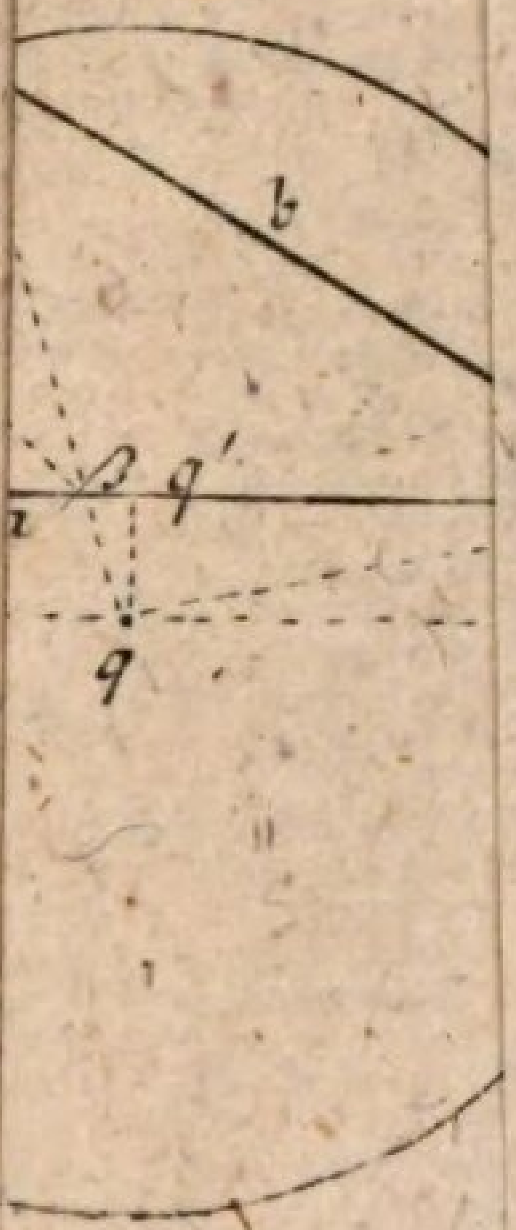
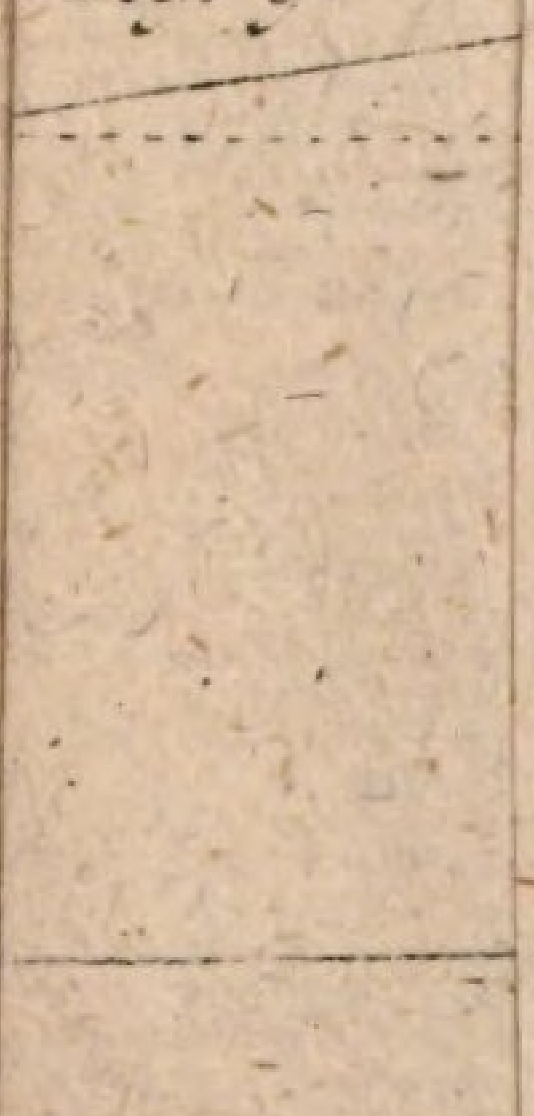


Fig. 9



Ranson, Joseph <<von>>,

Kleine mathematische Schriften mit ... 4 Tabellen

Nürnberg 1809

Math.u. 309 g
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594486-1